Alfateh University

Electrical & Electronics Engineering Department

EE303 Numerical Analysis

Mid-Term I

Answer all questions, Carry calculations to 3 decimal places, time allowed 1.5 hours

Q(1).

a) Write the Taylor Series Expansion of $f(x)=\sin(x)$ at x near 0

b) Write a recursive expression in the form of $T_{i+1} = \ldots T_i$ for the function in part *a* of this question.

c) Write a *C program* to find the sum of the series obtained in part b of this question

(Q2)

a) Using the Bisection method, find the root of the following non-linear function $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$. Use [1, 2] as starting values. Repeat until the absolute error is <= 10^{-3}.

b) What will be the *absolute error* after 80 iterations?

c) How iterations are needed for the *relative error* to drop down to 10^{-9}

(Q3)

The cubic $2x^3 + 3x^2 - 3x - 5=0$ has a root near in [1, 2]. Find the at least three rearrangements that will converge to this root using fixed point- iteration method.

(Q4)

a) Use *Newton's method* to find the root of the following function $f(x) = \cos(x) - e^{[illegible]}$ Start with $x_0 = 1$ and perform only five iterations

b) Repeat part a using the *secant method (only 5 iterations)*. Select any staring values and compare the relative error obtained in both cases.

Good Luck to All of You

Fall 2001 midterm test 1

Q1:- Taylor series:-

$f(x) = \sin x$

القانون

$$f(x) = f(x) + x f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

نحوله ونحلها

لأن $f(x) = f(0)$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f''''(x) = \sin x \Rightarrow f''''(0) = \sin x = 0$

1, 0, −1, 0, 1, 0, −1

دائماً عند التعويض نعوض مكان $f(x)$ فقط ولا تنسى تضع x المضروبة!

نعوض في القانون

$$f(x) = f(x) + x f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 \dots$$

Recursive:-

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

$$T_1 = -\frac{x^3}{3!}$$

$$T_{i+1} = (\quad) T_i$$

2:- Bisection:-

نعوض بقيمة

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 \Rightarrow$

باستخدام [1, 2] (a b)

$f(a) = f_1(1)$

ثم نعوض في f(x) ب 1.25 لنحصل على f(c)

$= 2(1)^3 + 4(1)^2 - 2(1) - 5 = -1 \Longrightarrow$

$f(b) = 2(2)^3 + 4(2)^2 - 2(2) - 5 = 23$

$f(a) \cdot f(b) < 0$ اذا كانت

$c = \frac{a+b}{2}$ مرضاها

$c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

ثم نعوض ب 1.5 مكان x في f(x) ← 1.5

a	b	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	2	-1	23	1.5	7.75
1	1.5	-1	7.75	1.25	2.65

$f(a) \cdot f(c) < 0$ $b = c$ اذا كانت فان

$f(b) \cdot f(c) < 0$ $a = c$ و " " فان

وهكذا حتى نتحصل نسبة الخطأ .00

ماليهاش وقت معين، لين ما تسوبهلي / اللي يطلبه الدكتور

what will be the absolute error after 80 iterations?

آخر ارقام القانون

$[1, 2]$ (a, b)

$(b_{n+1} - a_{n+1}) = 2^{-n}(b_0 - a_0)$

$(b_{n+1} - a_{n+1}) = 2^{n}(b_0 - a_0)$

$n = 80$

$(b_{n+1} - a_{n+1}) = 2^{-80}(2 - 1)$

$= 8.271 \times 10^{-25}$

How iterations are needed for relative error to drop down to 10^{-9}

$10^{-9} = 2^{-n}(2 - 1)$

$\log 10^{-9} = \log 2^{-n}(2 - 1)$

$\log 10^{-9} = \log 2^{-n}$

$-9 \log 10 = -n \log 2$

$n = \frac{-9 \log 10}{-\log 2} \Rightarrow n = 29.89 \simeq 30$

newton's

$f(x) = \cos x - e^{x^2}$

$\Rightarrow x_0 = 1$ 5 iteration

$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f'(x) = -\sin x - 2x e^{x^2}$

نعوض في المعادلة الاصلية $f(x)$ بـ 1

x	f(x)	f'(x)
1	-2.1779	-6.278
.653		-2.608

ثم نعوض في المعادلة المتفاضلة $f'(x)$ بـ 1

ثم لنتحصل على x الجديدة يجب ان نعوضها في القانون بالقيم التي تحصلنا عليها

$x_{n+1} = 1 - \frac{(-2.1779)}{-6.278}$

$x_{n+1} = 0.653$

ثم 0.653 نعوضها في الدالة الاصلية وثانيا هنا المتفاضلة " " " " " "

, الناتج من $f'(x)$ نكتبه في القانون لنتحصل على x

وهكذا 5 مرات

: b :-

secant method:-

(29)

$= x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right]$

* القانون :-

$x_0 = 1$
$x_1 = 2$
$x_2 = 3$

start at 1

مرات

$f(x) = \cos x - e^{x^2}$

n	x	f(xn)	f(xn-1)
1		-55.01	-2.1779
(2)			-55.01
3			
4			
5			

نعوض في القانون عنا

تكون $x = 2$

$f(x) = \cos 2 - e^{2^2}$

$= -55.01$

$f(x(1)-1) : f x_0 \Rightarrow f 1$

نعوض القانون

$f(x) = \cos x - e^{x^2}$

1

ثم نعوض في القانون

تاع secant

=

x الجديدة $= 2 + (-55.01)\left[\frac{2 - 1}{(-55.01) - (-2.1779)}\right]$

الناتج بنطلع قيمة x الجديدة ونعوض بها في f(x) الجديدة